

Berechnung einer Umlaufbahn im Schrittverfahren mit Beschleunigungsberechnung und im Halbschrittverfahren ohne Beschleunigungsberechnung

Konstanten und Startwerte:

Name	Größe und Einheit	Modell	Realität
Gravitationskonstante	G in $\frac{m^2}{kg^2}$	6	6,67E-11
Zentralkörpermasse	M in kg	30	5,97E+24
Zeitintervall (Schrittwerte)	dt in s	0,0001	60
Startposition x (rechts +)	x(0) in m	2	3E4
Startposition y (oben +)	y(0) in m	1	0
Startgeschwindigkeit x (weg->)	vx(0) in $\frac{m}{s}$	-1	0
Startgeschwindigkeit y (weg^)	vy(0) in $\frac{m}{s}$	7	? Astra

Feldvariablen:

Position x (rechts +)	x(i) in m		
Position y (oben +)	y(i) in m		
Abstand	r(i) in m		
Geschwindigkeit x (weg->)	vx(i) in $\frac{m}{s}$		
Geschwindigkeit y (weg^)	vy(i) in $\frac{m}{s}$		
Gesamtbeschleunigung a (weg />))	a(i) in $\frac{m}{s^2}$	unnötig	
Beschleunigung x (weg ->)	ax(i) in $\frac{m}{s^2}$		
Beschleunigung y (weg ^)	ay(i) in $\frac{m}{s^2}$		

Berechnung der Beschleunigungskomponenten über den Winkel des Fahrstrahls zur x-Achse:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad a_x = a \cdot \cos\alpha, \quad a_y = a \cdot \sin\alpha, \quad a_x = \frac{a \cdot x}{r}, \quad a_y = \frac{a \cdot y}{r}.$$

Abstand berechnen:

$$r(0) = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}$$

Beschleunigung berechnen:

$$a = \frac{G \cdot M}{r^2}, \quad \text{mit } a \text{ in Komponentenzerlegung ist dies zusammengefasst dann:}$$

$$a_x(0) = -\frac{G \cdot M \cdot x(0)}{r^3}, \quad a_y(0) = -\frac{G \cdot M \cdot y(0)}{r^3}.$$

Das negative Vorzeichen ist wichtig für die Richtung.

Hier ist eine große Quelle für Rundungsfehler, daher muss die größte Genauigkeit der Variablen eingestellt werden.

Position aktualisieren:

$$x(1) = x(0) + v_x \cdot dt + a_x(0) \cdot \frac{dt^2}{2}, \quad y(1) = y(0) + v_y \cdot dt + a_y(0) \cdot \frac{dt^2}{2}$$

$$x(1) = x(0) + v_x \cdot \left(\frac{dt}{2}\right), \quad y(1) = y(0) + v_y \cdot \left(\frac{dt}{2}\right)$$

Geschwindigkeit aktualisieren:

$$v_x(1) = v_x(0) + a_x \cdot dt, \quad v_y(1) = v_y(0) + a_y \cdot dt$$

$$v_x(1) = v_x(0) + a_x \cdot \left(\frac{dt}{2}\right), \quad v_y(1) = v_y(0) + a_y \cdot \left(\frac{dt}{2}\right)$$

Ablauf:

Grafik löschen, Achsen zeichnen, eventuell:
beschriften, Kreis einzeichnen, Zentralmasse markieren

Gravitationskonstante festlegen	G	Konstanten
Masse und Zeitintervall festlegen	M, dt	Konstanten
Position festlegen	x0, y0	Startwerte
Position in Grafik plotten		
Geschwindigkeit festlegen	vx0, vy0	Startwerte
Abstand berechnen	r0	$r(0)=\sqrt{x(0)^2+y(0)^2}$
Beschleunigung x berechnen	ax0	$ax(0)=-G*M*x(0)/r(0)^3$
Beschleunigung y berechnen	ay0	$ay(0)=-G*M*y(0)/r(0)^3$
Position x aktualisieren	x1	$x(1)=x(0)+vx(0)*dt+ax(0)*dt^2/2$
Position y aktualisieren	y1	$y(1)=y(0)+vy(0)*dt+ay(0)*dt^2/2$
Position in Grafik plotten		
Geschwindigkeit x aktualisieren	vx1	$vx(1)=vx(0)+ax(0)*dt$ $vx(1)=vx(0)+ax(0)*(dt/2)$
Geschwindigkeit y aktualisieren	vy1	$vy(1)=vy(0)+ay(0)*dt$ $vy(1)=vy(0)+ay(0)*(dt/2)$

Schleife Start i=1 bis ?

Abstand berechnen	r	$r(i)=\sqrt{x(i)^2+y(i)^2}$
Beschleunigung x berechnen	ax	$ax(i)=-G*M*x(i)/r(i)^3$
Beschleunigung y berechnen	ay	$ay(i)=-G*M*y(i)/r(i)^3$
Position x aktualisieren	x	$x(i+1)=x(0)+vx(i)*dt+ax(i)*dt^2/2$ $x(i+1)=x(0)+vx(i)$
Position y aktualisieren	y	$y(i+1)=y(0)+vy(i)*dt+ay(i)*dt^2/2$ $y(i+1)=y(0)+vy(i)$
Position in Grafik plotten		
Geschwindigkeit x aktualisieren	vx	$vx(i+1)=vx(0)+ax(i)*dt$ $vx(i+1)=vx(0)+ax(i)*dt/2$
Geschwindigkeit y aktualisieren	vy	$vy(i+1)=vy(0)+ay(i)*dt$ $vy(i+1)=vy(0)+ay(i)*dt/2$

Schleife Ende

Ende

Siehe auch <https://www.leifiphysik.de/mechanik/gravitationsgesetz-und-feld/ausblick/numerische-behandlung-von-satellitenbahnen>